岐阜経済大学論集 35 巻 1 号（2001 年）

確率過程下での為替レート変動

岡　田　義　昭

1. はじめに

1973 年 2–3 月に主要通貨が変動相場制に移行して以来これまで，為替レートの変動メカニズムに関して様々な理論的・実証的考察がなされてきた。今日一般的ないしは標準的と見なされている為替レート変動メカニズムの説明は，およそ以下のごとくである。

先ず，為替レートに影響を及ぼし合う諸要因や相互関連性の観点から，分析の時間軸を「短期」「中期」「長期」に分割する。そして，短期では金融市場体系の一部として為替レートが決定されると考える。すなわち，異種通貨金融資産の需給に応じて各通貨の価格である為替レートが決まるとするものである。そして各金融資産の需給に影響を及ぼす要因としては，短期であることに鑑みて主として金利と予想為替レートに着目する。次いで中期では，市場の模索過程（tâtonnement）の調整速度の違いから，短期で所与とされた財サービス産出量や国際収支，雇用，物価，賃金などのマクロ経済変数を明

示的に取り入れて，その相互依存性・相互関連性を分析の焦点に据える。さらに長期では，各国の物価水準の差に注目して均衡為替レートの決定を捉える[1)]。

かくして，一般に短期，すなわち日次，週単位，ないしはせいぜい月々の為替レートの動きに関してその変動メカニズムを説明するには，次のようなアンカバー・ベースの金利裁定（UIP）を前提として内外金融資産の需給を基に論理展開するのが通例であり，そして今日そうした考えに沿った実証分析も多数蓄積されつつある[2)]。

(1)　$i = i^* - \rho + (s^e - s)/s$

ただし　i　：自国利子率（小数，年率/単位期間）

i^*：外国利子率（小数，年率/単位期間）

ρ　：リスク・プレミアム（小数，年率/単位期間）

s　：直物為替レート（自国通貨建）

s^e：直物為替レートの予想値（単位期間後，自国通貨建）

ところでここで重要なのは，(1)式のように定式化された金利裁定条件に為替レートの将来予想が明示的に組み込まれていることである。したがって，通常，将来の為替レートの予想形成の項に関しては，① 現在の為替レートが将来も維持されると予想する静学的予想，② 過去の予想為替レートと実現した為替レートとの差をもとに将来の予想を随時修正する適応的予想，③ 前期から当期への為替レートの変化が将来も同方向で維持されると想定する外挿的予想，④ 過去の数期にわたる為替レートに一定のウエートを付けて将来を予想する分布ラグ予想，⑤ 将来の為替レートはある種の均衡為替レートに戻っていくとする回帰的予想，⑥ 利用可能な情報を最大限活用することにより得た予想為替レートの客観的確率に主観的確率を一致させるとする合理的予想など，種々のフォーミュラを分析目的に応じて適用する必要がある。

ところで，為替レートの時系列データの短期変動部分を仔細に観察すると，そこには一定の規則性を持った動きというよりは，むしろ「ランダム・ウォーク」的な不規則変動の色彩が強いことに気付く。すなわち，外国為替市場は，その規模や取り扱われる財の性質，高度の情報機器で装備されたインフラ，そして市場参加者の専門性などからかなりの程度「効率的」[3]な市場と言える。それゆえ，外国為替市場には「ランダム・ウォーク」仮説が妥当する余地は極めて大きいと言っても過言ではあるまい[4]。したがって，内外金融資産のポートフォリオ決定に伴う金利裁定にあたっては，ここに予想為替レートを「確率過程（Stochastic Process)」として捉える必要があるであろう。

そこで本稿では，短期的な為替レートの時系列の動きが「ウィーナー過程（Wiener Process)」ないしは「ブラウン運動（Brownian Motion)」に従うものと仮定した時の変動メカニズムを考察してみよう。

〔注〕

1） 例えば以下の文献を参照。

岡田義昭（1997）『国際金融研究』十一房出版
河合正弘（1994）『国際金融論』東京大学出版会
浜田宏一（1996）『国際金融』岩波書店
武藤恭彦/須田美矢子（1981）「国際金融理論の発展と現状」『季刊現代経済』1981年春季号
Argy, V. (1994), *International Macroeconomics,* Routledge
Dornbush, R. (1980), *Open Economy Macroeconomics,* Basic Books
Grossman, G.M. and K. Rogoff eds. (1995), *Handbook of International Economics,* Vol. 3, North-Holland 所収論文
Jones, R.W. and P.B. Kenen eds. (1985), *Handbook of International Economics,* Vol. 2, North-Holland 所収論文
Krugman, P.R. and M. Obstfeld (1994), *International Economics: Theory and Policy,* 3rd ed., HarperCollins
MacDonald, R. and M.P. Taylor eds. (1992), *Exchange Rate Economics,* Vol. 1 and Vol. 2, The Cambridge U.P. 所収論文
Obstfeld, M. and K. Rogoff (1996), *Foundation of International Macroeconomics,*

The MIT Press

2) 例えば以下の文献を参照。

岡田義昭（1979）「変動為替レートの理論と実証」『経済学研究年報』No. 19，早大経済学研究会

刈屋武昭/深尾京司編（1988）『合理的予想形成によるインフレ・為替分析』有斐閣

東京銀行調査部（1994）『国際収支の経済学』有斐閣，第4章

Branson, W.H. (1977), "Asset Markets and Relative Prices in Exchange Rate Determination," *Sozialwissenschaftliche Annalen,* 1

———, H. Halttunen, and P. Masson (1977), "Exchange Rates in the Short Run," *European Economic Review,* December 1977

Frankel, J.A. (1993), *On Exchange Rate,* The MIT Press

——— and A.K. Rose (1995), "Emperical Research on Nominal Exchange Rates," (in Grossman and Rogoff (1995), Chap. 33)

3) 外国為替市場が効率的であるとは，「現在の為替レートには市場参加者がその時点までに知り得たすべての情報が織り込まれており，したがって，将来の為替レート変化に対する期待値はゼロとなる」というものである。ただしこの場合，情報の範囲をどこまでとるかによって「効率性」の意味合いは自ずと異なってくる。チャート分析のごとく，情報がたかだか過去の為替レートのみに限定される場合は「弱い効率性」と称される。これに対して，情報が過去の為替レートのみならず，市場に公開された様々な情報まで拡大された時の効率性は「準強の効率性」と称される。さらに，情報が個人レベルの私的情報まで広げられた時の効率性は「強い効率性」と称される。この場合，例えば，ある市場参加者が独自に入手した私的情報を活用して売買しても，そのことが他の市場参加者に瞬時に知れ渡ることとなり，追随した売買によって新たな将来の利潤機会が残されていることのないよう，為替レートは動いてしまうというものである（伊藤隆敏編著（1992）『国際金融の現状』有斐閣，第3章）。

4) 例えば以下の文献を参照。

岡田義昭（1996）「変動為替レートの計量分析」Union Bank of California, Working Paper 96-6

河合正弘編著（1996）『アジアの金融・資本市場』日本経済新聞社，第9章

瀬尾純一郎（1981）「わが国外為市場の効率性」『金融研究』1981年9月号

高木信二（1989）『為替レート変動と国際通貨制度』東洋経済新報社，第1部

Frankel, J.A., G. Galli and A. Giovannini eds. (1996), *The Microstructure of Foreign Exchange Markets,* The Chicago U.P.

Ito, T. and V. Roley (1987), "News from the US and Japan," *Journal of Monetary Economics,* pp. 255–277

2. 為替レート変動モデルの素描

一般に，金融・通貨市場に比べて財サービス市場や労働市場の模索過程に関する調整速度は相対的に遅いから，分析の時間軸を日次や週単位ないしはせいぜい月次程度の短期に限定すると，財サービス産出量や雇用量，物価，賃金などのマクロ経済変数は所与と考えることができる。そこで，短期の為替レート変動メカニズムを以下金融・通貨市場に限定して検討していく。

先ず，我々の想定する小国マクロ経済では，自国通貨 M，外国通貨 M^*，自国通貨建金融資産 d（株式・債券などの合成財ストック），外国通貨建金融資産 f（同）が存在し，自国通貨建金融資産を売買するには，自国金融市場で自国通貨を用いて取引される。同様に，外国通貨建金融資産を売買するには，外国金融市場で外国通貨を用いて取引される[1)]。自国通貨建金融資産を一定の期間保有すると自国金利分（i；単位期間当りに調整）が，外国通貨建金融資産を保有すると外国金利分（i^*；同）が付与される。自国通貨と外国通貨は，外国為替市場において為替レート s（自国通貨建）で取引される。各金融資産ならびに通貨（M, M^*, d, f）の総賦存量は，短期的には時間を通じて一定とする。

各投資家（i.e. 市場参加者）は，ポートフォリオとして自国通貨建金融資産ならびに外国通貨建金融資産の２種類を保有する。収益が最大となるようなこれら最適ポートフォリオの決定にあたっては，自国利子率，外国利子率，現行為替レート，そして予想為替レートが考慮され，(1)式で示された金利平価条件がその場合妥当するものとする。したがって，内外金利が両金融市場のオークショニア（競売人）から市場参加者に告げられると，彼等はその

時点で利用可能な情報を最大限活用して将来の為替レートを予想する。例えばリスク・プレミアムを考慮してなお金利差以上に外国通貨が将来増価すると推測する投資家（i.e.（1)式において左辺 < 右辺と推測）は，最適化行動から現行ポートフォリオを組み直すべく，国内金融市場で自国通貨建金融資産を売却して自国通貨を得る。次にその自国通貨を外国為替市場で外国通貨に交換して，外国金融市場で外国通貨建金融資産を購入する。こうした投資家のポートフォリオの組替えにより，外国為替市場で自国通貨売り・外国通貨買いが起こり，その結果，市場に外国通貨の超過需要（したがって自国通貨の超過供給）が生じて自国通貨建の直物相場は上昇（i.e. 減価）する。

以上が我々の想定する小国マクロ経済における為替レートの短期変動メカニズムに関するスケッチである。

〔注〕

1) ここでは通貨の主要機能のうち，計算単位と交換手段のみに限り，価値貯蔵機能は考慮しない。したがって，市場参加者の効用関数の中には通貨は入ってこない。

3. 為替レート変動モデルの定式化

先ず我々は，我々の想定する金融市場に関して次のような仮定を置く。

〔1〕 自国通貨・外国通貨の名目為替レート s（自国通貨建）は短期的には次のような確率過程に従うものとする。

(2) $$ds = \mu s dt + \sigma s dB$$

ただし μ ：定数

σ ：定数

B ：ウィーナー過程に従う時系列

〔2〕 自国通貨建金融資産と外国通貨建金融資産とは，各々完全代替的（i.e. (1)式で $\rho=0$）である。

〔3〕 各投資家にとって各金融資産の需要には必ず飽和点が存在し，いずれも無限大となることはない。

〔4〕 外国通貨建金融資産の名目値は，期末には1となるよう正規化されている[1)]。

次に，自国居住者の投資家にとって，外国通貨建金融資産の名目値 f は為替レートの動き s ならびに時間の経過 t とともに変化するから[2)]，

$$f=f(s,\ t)\quad(\geqq 0),\qquad \forall s\in[0,\ \infty),\qquad \forall t\in[0,\ T] \tag{3}$$

と置く。ここで，上述各仮定から，$\forall t\in[0,\ T]$ に対して

$$\begin{array}{lll} & \text{(i)} & f_s(s,\ t)\geqq 0 \\ (4) & \text{(ii)} & f(s,\ T)=s_T \\ & \text{(iii)} & \displaystyle\int_0^{\infty}|f(s,\ t)|\,ds<\infty \end{array}$$

が言える。

ところで，ある投資家が時点 t で名目値 f の外国通貨建金融資産を金融市場で1単位売却し，他方自国通貨建金融資産を購入するために外国為替市場で為替レート s の自国通貨を $\partial f/\partial s$ 単位買い入れるものとすれば，この投資家のポートフォリオ価値 V は，

$$V=f_s s-f \tag{5}$$

となる。したがって，Δt 時間でのポートフォリオ価値の変化分は

$$\Delta V=f_s\Delta s-\Delta f \tag{6}$$

で表せる。ここで為替レート s の時系列的動きには，仮定〔1〕から伊藤の補

題[3]が使えるから，

$$
(7)\qquad \begin{cases} \varDelta s=\mu s\varDelta t+\sigma s\varDelta B \\ \varDelta f=(f_s\mu s+f_t+(1/2)f_{ss}\sigma^2s^2)\varDelta t+f_s\sigma s\varDelta B \end{cases}
$$

を(6)式に代入すると，

$$
(8)\qquad \varDelta V=(-f_t-(1/2)f_{ss}\sigma^2s^2)\varDelta t
$$

を得る。この(8)式で示されたポートフォリオの変化分では$\varDelta B$の項が消去されており，したがって当該ポートフォリオは$\varDelta t$時間の間リスク・フリーとなっていることが分かる。それゆえ，$r=i-i^*$と置けば，

$$
(9)\qquad \varDelta V/V=r\varDelta t
$$

が必ず成立する。この(9)式に(5)式・(8)式をそれぞれ代入して整理すれば，各投資家のポートフォリオに関して，

$$
(10)\qquad \begin{gathered} rf=f_t+(1/2)f_{ss}\sigma^2s^2+rf_s s \\ \forall s\in[0,\ \infty),\ \forall t\in[0,\ T] \\ \text{ただし}\quad f(s,\ T)=s_T \end{gathered}
$$

という偏微分方程式を得る。

〔注〕

1) すなわち，p^*を外国通貨建金融資産の価格，w^*を外国通貨建金融資産の実質値とすれば，外国通貨建金融資産の名目値fは$f=p^*w^*$であるから，$f(T)=p_T^*w(T)=1$である。

2) より正確には，内外金融資産の価格をp, p^*，確定利子をR, R^*とすれば，$p=R/i$, $p^*=R^*/i^*$であるから，市場利子率i, i^*が期首にオークショニアから市場にアナンスされると，各投資家にとって期首における単位期間中の想定資産価格は一定となる。

3) 「伊藤過程」ならびに伊藤の補題については，
渡辺信三（1975）『確率微分方程式』産業図書

エクセンダール（谷口説男訳）(1999)『確率微分方程式』シュプリンガー
Harrison, J.M. (1985), *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems,* Krieger Publishing Co.

を参照。

4. 為替レート変動モデルの解法[1)]

先ず前節の(10)式において，外国通貨建金融資産 f の変数 $(s,\ t)$ に対して

$$u = \ln(s) + (r - \sigma^2)(T - t) \quad (11)$$
$$v = T - t$$

と変数変換を施し，さらに $g(u,\ v)$ を未知の連続関数として，

$$f(s,\ t) = g(u,\ v)\exp(-rv) \quad (12)$$

と置く。すると，補論で示されるごとく(10)式は，

$$g_{uu}(u,\ v) - (2/\sigma^2)\,g_v(u,\ v) = 0 \quad (13)$$
$$\forall\, u \in (-\infty,\ +\infty),\ \forall\, v \in [0,\ T]$$
$$\text{ただし}\quad g(u,\ 0) = h(u)$$

と書き改めることができる。そこで，(13)式を

$$g_v = D g_{uu}, \qquad \text{ただし}\ D = \sigma^2/2 \quad (14)$$

と置いて，両辺に $\exp(-iku)$ を掛けて u の定義域全体に関して積分すれば，フーリエ変換公式を用いることによって(14)式の左辺は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_v(u,\ v)\exp(-iku)\,du = F_v(k,\ v) \quad (15)$$

となる。また右辺は

$$D\int_{-\infty}^{+\infty} g_{uu}(u,\ v)\exp(-iku)\,du = -Dk^2F(k,\ v) \tag{16}$$

となる[2)]。かくして，(13)式の偏微分方程式から得られるフーリエ変換$F(k,\ v)$についての常微分方程式は

$$F_v = -Dk^2F \tag{17}$$

となるから，これを解けば

$$F(k,\ v) = F(k,\ 0)\exp(-Dk^2v) \tag{18}$$

を得る。この(18)式にフーリエ逆変換を施せば，

$$g(u,\ v) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} F(k,\ 0)\exp(-Dk^2v + iku)\,dk \tag{19}$$

となる。ここで(13)式の $g(u,\ 0) = h(u)$ を用いれば，

$$F(k,\ 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\exp(-iku)\,du \tag{20}$$

が成立するから，(19)式は

$$\begin{aligned} &g(u,\ v) \\ &\quad = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{u})\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(ik(u-\tilde{u}) - Dk^2v)\,dk\right]d\tilde{u} \end{aligned} \tag{21}$$

となる。さらに $\exp(-\beta y^2)$ にフーリエ変換を施した公式

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\beta y^2 - iky)\,dy \\ &\qquad = \sqrt{\pi/\beta}\cdot\exp(-k^2/4\beta) \qquad (\beta\ \text{は正の実数}) \end{aligned} \tag{22}$$

を用いれば[3)]，この式で k を $-(u-\tilde{u})$ で置き換え，また積分変数 y を k に，β を Dv に置き換えることにより，$dy/dk = 1$ であるから，(22)式は

(23)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ik(u-\tilde{u}) - Dk^2 v\right) dk$$
$$= \sqrt{\pi / Dv} \cdot \exp\left(-(u-\tilde{u})^2 / 4Dv\right)$$

となる。かくして(21)式は

(24)
$$g(u,\ v)$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{u}) \exp\left(-(u-\tilde{u})^2 / 2\sigma^2 v\right) d\tilde{u}$$

となることが分かったから，具体的に $h(u)$ の関数形を与えれば，ここに未知関数 $g(u,\ v)$ を求めることができる。さらに，これを(12)式に戻せば $f(s,\ t)$ が一意的に定まる。

〔注〕

1） 偏微分方程式(10)式に関する具体的な解法には，今日までに工学分野のみならずデリバティブの分野も含めて種々のテクニックが開発されてきているが，ここでは主として船越満明（1997）『キーポイント・フーリエ解析』（岩波書店）にならった。その他次のような文献を参照。

石村貞夫／石村園子（1999）『ブラック・ショールズ微分方程式』東京図書

岩城秀樹（1998）『デリバティブ――理論と応用――』朝倉書店

河村哲也（1997）『キーポイント・偏微分方程式』岩波書店

木島正明（1994）『ファイナンス工学入門・第 II 部』日科技連

三浦良造（2000）『デリバティブの数理』サイエンス社

森村英典／木島正明（1991）『ファイナンスのための確率過程』日科技連

Black, F. and M. Scholes (1973), "The Pricing of Option and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy,* May/June 1973

Merton, R.C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics,* Spring 1973

Neftci, S.N. (1996), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives,* Academic Press

2） 導関数のフーリエ変換はもとの関数のフーリエ変換に ik を掛けたものとなるという公式を 2 回用いる。

3） 例えば船越（1997），pp. 139–142 参照。

5. 結　　び

我々の想定するマクロ経済では，各投資家のポートフォリオを構成する内外金融資産の需給に応じて，為替レートの短期均衡値が決まると考えた。しかもこうした外国通貨建金融資産は，自国居住者投資家にとってみれば絶えず為替変動リスク[1)]にさらされているから，将来にわたる為替レートをどう予想するかが，各投資家の異時点間の主体的均衡に基づく最適ポートフォリオ決定に，したがって為替レートの短期変動に決定的な影響を及ぼすであろう。

ところで，過去の為替レートと将来の為替レートとを対応づけるフォーミュラとしては，静学的予想，適応的予想，外挿的予想，回帰的予想，分布ラグ予想，合理的予想などが利用できることを既に確認した。そこで合理的予想仮説を市場の価格形成プロセスに応用した「市場の効率性」仮説を外国為替市場に適用すると，「ランダム・ウォーク」ないしは「確率過程」が外国為替市場で妥当することが言えるから，一般的な「ウィーナー的」確率過程を「伊藤過程」に限定することにより，確率過程に従う為替レートの短期変動メカニズムを「操作可能」な程度にまで特定化し得ることを示した。すなわち，別途市場における為替レートのボラティリティ（σ）の値を計算すれば，我々の結果を利用することにより，通常の正規分布の数値計算を利用することで，為替変動リスクにさらされた外国通貨建金融資産の将来時点での価値を具体的に求め得るから，最適ポートフォリオ・バランスに対応した為替レートの短期均衡値の決定メカニズムを明らかにし得た。

〔注〕

1)　一般に不確定な事象に対して客観的確率が分かっている場合を「リスク」と称し，主観的確率のみの場合は「不確実」と称されるが，ここでは為替リスクについ

て特に両者を区別しない。

補　論

ここで $f(s,\ t) = g(u,\ v)\exp(-rv)$ において，f_s，f_t，f_{ss} をそれぞれ計算する。

(i)
$$\begin{aligned} f_s &= (\partial(\exp(-rv)g)/\partial u)(\partial u/\partial s) \\ &\quad + (\partial(\exp(-rv)g)/\partial v)(\partial v/\partial s) \\ &= \exp(-rv)g_u/s \qquad\qquad (\because\ \partial v/\partial s = 0) \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} f_t &= (\partial(\exp(-rv)g)/\partial u)(\partial u/\partial t) \\ &\quad + (\partial(\exp(-rv)g)/\partial v)(\partial v/\partial t) \\ &= \exp(-rv)g_u(-r + \sigma^2/2) \\ &\quad + (-r\cdot\exp(-rv)g + \exp(-rv)g_v)(-1) \\ &= \exp(-rv)[(-r + \sigma^2/2)g_u + rg - g_v] \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} f_{ss} &= \partial f_s/\partial \mathrm{s} \\ &= \partial(\exp(-rv)g_u/s)/\partial s \\ &= \exp(-rv)[(g_{uu}/s)(\partial u/\partial s) - g_u/s^2] \\ &= (\exp(-rv)/s^2)(g_{uu} - g_u) \end{aligned}$$

これら結果を(10)式に代入すると，(10)式において

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \exp(-rv)rg \\ \text{右辺} &= \exp(-rv)[-rg_u + (\sigma^2/2)g_u + rg - g_v + \sigma^2 g_{uu}/2 \\ &\qquad - \sigma^2 g_u/2 + rg_u] \\ &= \exp(-rv)[rg - g_v + (\sigma^2/2)g_{uu}] \end{aligned}$$

したがって，$g_{uu} - (2/\sigma^2)g_v = 0$ を得る。

次に，$f(s, t)=g(u, v)\exp(-rv)$ で，$t=T$ とすれば，

$$f(s, T)=g(u, 0)\exp(-r\cdot 0)=g(u, 0)$$

となる。

また，$u=\ln(s)+(r-\sigma^2/2)(T-t)$ で，同じく $t=T$ とすれば，

$$u=\ln(s),\ \text{すなわち},\ s=\exp(u)$$

となるから，$\exp(-\infty)=0$ を考慮して，

$$f(s, T)=s_T\in[0, +\infty)\ \text{は}\ g(u, 0)=\exp(u),\ \forall\, u\in(-\infty, +\infty)$$

となることが導かれた。