岐阜経済大学論集 30 巻 2 号（1996 年）

多期間収益率の時間依存型ボラティリティの導出

── 多変量 VAR-GARCH モデルのケース ──

中 川 裕 司

1. はじめに
2. n 変量 VAR (1)-GARCH (1,1) モデル
3. T 期間条件付期待収益率
3.1 期間 $t+s$ の期待収益率の導出
3.2 期間 $t+s$ の第 k ファクターの収益率の導出
3.3 期間 $t+s$ の収益率の導出
4. T 期間収益率の条件付分散
4.1 期間 $t+v$ の GARCH モデルの誤差項の条件付分散の導出
4.2 期間 $t+s$ の第 k ファクターの収益率の条件付分散の導出
5. おわりに
Appendices

1. はじめに

現在のファイナンスの中で，リスクとその測定はかなり重要である。その一例として，現時点を t, $t+T$ をオプションの満期時点，X を行使価格，r を無危険利子率，σ を本源的証券の収益率の瞬間ボラティリティ，$N(\cdot)$ を正規分布関数とするとき，周知の Black-Scholes (BS) 公式のヨーロピアン・コール・オプションの理論価値 C_t が次式で与えられる。

$$C_t = p_t N(d) - Xe^{-rT} N(d - \sigma\sqrt{T}), \qquad d = \frac{\ln(p_t / X) + rT + \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Black and Scholes (1973) によれば，本源的証券の価格が幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion) するという仮定の下で上式が導かれているが，現在では本源的証券の価格が二項過程など他の確率過程の下でも上式が得られることが知られている。その中で Merton (1976) は本源的証券のオプション満期時点 $t+T$ の価格が対数正規分布するという仮定の下では，$\sigma^2 T$ の代わりにオプションの満期時点 $t+T$ までの本源的証券の収益率の分散を代入すればよいことを述べている。

実際にリスクを測定するために，いくつかの方法が存在しているが，その中で Akgiray (1989) は 1 変量 GARCH (1, 1) モデルを使って，20 日間収益率の条件付分散を予測し，中川 (1993)[1] は 1 日の収益率を日中収益率と夜間収益率に分けて，それぞれの収益率と収益率モデルの誤差項がその直前の収益率と誤差項の条件付分散から影響を受けるような GARCH モデルを設定して，現在の情報を条件とした将来の n 日間の収益率の分散を導いている。さらに中川 (1996) は 2 変量 VAR (1)-GARCH (1, 1) モデルでの n 日間の収益率の分散を求めている。これらの方法は収益率の時系列モデルを設定して，推定されたパラメータをもとに現在の情報 (収益率モデルの残差) を条件として将来のリスクを測定しようというものである。

こうした時系列モデルに基づくリスクの測定はそのモデルの設定に大きく依存し，設定されたモデルが簡単であれば，リスクの測定も容易であるが，たとえば 1 日 24 時間の通貨 (外国為替) 取引を考えるときには，多数の市場で一部同時あるいは順次に取引が続いていくことを考慮すれば，その通貨の 1 市場での変化率は多数の市場から影響を受けて，モデルの設定も多少複雑にならざるを得ない。たとえば，Engle, Ito, and Lin (1990)[2] と Ito, Engle, and Lin (1992)[3] は東京市場とニューヨーク市場とヨーロッパ市場の 3 市場間の米国ドルに対する日次為替レートの変化率を GARCH モデルで

分析している。また，Ballie and Bollerslev (1990) は米国ドルに対する主要欧州4通貨の週次リスク・プレミアム[4]を，Bollerslev (1990) は米国ドルに対する主要欧州4通貨の spot rate の変化率[5]を分析している。

さらに通貨オプションの価値を考えるときには問題がより複雑になる。たとえば先のBS公式より通貨オプションの価値を求めようとするとき，オプション満期までの取引期間というフローがより多数の市場間の影響を複雑にし，使用されるべきリスク尺度も将来の予測に基づく分散でなければならない。また通貨オプション取引まで複雑でなくとも，日経オプション取引の場合でも海外市場で取引されていることを考えれば，本論文で想定する多変量 VAR-GARCH モデルでの条件付分散の導出が有用となるであろう。本論文では，1期間を多数の時間帯で取引される多種類の資産の価格が相互に影響する（たとえば，国内外の貴金属先物取引の）場合，または多数の市場で取引される1種類の資産の価格が相互に影響する（たとえば，国内外の日経オプション取引の）場合の収益率とそのボラティリティを考慮して多変量 VAR (1)-GARCH (1,1) モデルを設定した。このとき後者を考える場合，n 個の市場で期間 t 中に取引される時間帯の最小公倍数が m 個であると考える。次節ではまず多変量 VAR (1)-GARCH (1,1) モデルを設定し，続く第3節では多期間収益率を導き，第4節では第3節で求めた多期間収益率のリスクを求める。

2. n 変量 VAR (1)-GARCH (1,1) モデル

1期間を m 個の時間帯に区分して，任意の時間帯に取引される n 種類の資産の価格が相互に影響する，または n 個の市場で任意の時間帯に取引される1種類の資産の価格が相互に影響する，と想定するとき，1期間 t を区分して第 $k-1$ 時点から第 k 時点の第 i 資産の対数相対価格 $r_{ik,t}$ を以下では第 k ファクターの収益率とよび，次式で与えることにする。このとき，

任意の1期間中に取引される時間帯の最小公倍数が m 個であると考え，1資産が取引される時間帯は複数であってもかまわない。

$$r_{i1,t}=\ln(p_{i1,t}/p_{im,t-1}),\quad r_{ik,t}=\ln(p_{ik,t}/p_{ik-1,t}),$$
$$\text{for}\quad i=1,2,\cdots,n,\quad k=2,3,\cdots,m. \tag{1}$$

ここで，$p_{ik,t}$ は期間 t の第 i 資産の第 k 時点の価格を表す。各収益率の多変量VAR (1)-GARCH (1,1) モデルは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} r_{i1,t}&=c_{i1}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij1}r_{jm,t-1}+\varepsilon_{i1,t},\\ r_{ik,t}&=c_{ik}+\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}r_{jk-1,t}+\varepsilon_{ik,t}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{i1,t}\,|\,\psi_{m,t-1}\sim N(0,h_{i1,t}),\qquad \varepsilon_{ik,t}\,|\,\psi_{k-1,t}\sim N(0,h_{ik,t}),$$

$$E[\varepsilon_{i1,t}\varepsilon_{jl,t+s}\,|\,\psi_{m,t-1}]=E[\varepsilon_{ik,t}\varepsilon_{jl,t+s}\,|\,\psi_{k-1,t}]=0,$$

$$E[\varepsilon_{i1,t}\varepsilon_{ik,t}\,|\,\psi_{m,t-1}]=\rho_{i1,ik}\sqrt{h_{i1,t}h_{ik,t}},\qquad E[\varepsilon_{ik,t}\varepsilon_{iq,t}\,|\,\psi_{k-1,t}]=\rho_{ik,iq}\sqrt{h_{ik,t}h_{iq,t}},$$

$$\begin{aligned} h_{i1,t}&\equiv \mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{i1,t}\,|\,\psi_{m,t-1})=\alpha_{i1}+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij1}\varepsilon^2_{jm,t-1}+\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij1}h_{jm,t-1},\\ h_{ik,t}&\equiv \mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{ik,t}\,|\,\psi_{k-1,t})=\alpha_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ijk}\varepsilon^2_{jk-1,t}+\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ijk}h_{jk-1,t}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{for}\quad i,j=1,2,\cdots,n,\quad l=1,2,\cdots,m,\quad s=1,2,\cdots,$$
$$k,q=2,3,\cdots,m,\quad (k<q).$$

ここで，

$$\psi_{k,t}=\{\varepsilon_{ik,t},\varepsilon_{ik,t-1},\varepsilon_{ik,t-2},\cdots\}\quad\text{for}\quad i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,m, \tag{4}$$

であり，期間 t での第 k 時点の情報集合を表し，期間 t の第 k ファクターの各収益率を観測し ($k=1,2,\cdots,m-1$)，期間 t の第 $k+1$ ファクターの各収益率はまだ観測していない時点に現在がある場合の情報集合が $\psi_{k,t}$ とな

る。言い換えれば，現時点は期間tの第k時点から第$k+1$時点の間にあることを意味している[6)]。c_{il}とα_{il}は定数項，α_{ijl}とβ_{ijl}とγ_{ijl}は回帰係数，$\varepsilon_{il,t}$は誤差項である。第i資産の第kファクターの期待収益率モデルを表す(2)式をVARモデルとよび，(3)式をGARCHモデルとよぶ。ρ_{kl} $(k, l=1,2,\cdots,m,\ \ k\neq l)$は第$k$ファクターと第$l$ファクターのそれぞれのVARモデルの誤差項の相関係数を表し，$E[\cdot\,|\,\psi_{k,t}]$は期間tの第kファクターの情報集合$\psi_{k,t}$の下での条件付期待値を表し，$N(0,h_{ik,t})$は平均ゼロ，分散が$h_{ik,t}$である正規分布関数を表す。$h_{i1,t}\equiv E[\tilde{\varepsilon}_{i1,t}^2\,|\,\psi_{m,t-1}]$は期間$t-1$の情報集合$\psi_{m,t-1}$の下での第$i$資産の第1ファクターのVARモデルの誤差項の条件付分散（heteroskedastic variance），言い換えると時間依存型分散（time-varying variance）を表し，$h_{ik,t}\equiv E[\tilde{\varepsilon}_{ik,t}^2\,|\,\psi_{k-1,t}]$ $(k=2,3,\cdots,m)$は期間tの情報集合$\psi_{k-1,t}$の下での第i資産の第kファクターのVARモデルの誤差項の条件付分散を表す。

3. T期間条件付期待収益率

次の小節では，情報集合$\psi_{l,t}$の下での$(l=1,2,\cdots,m)$，期間$t+s$ $(s\geq 0)$の第i資産の第kファクターの条件付期待収益率$E[\tilde{r}_{ik,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]$を求め，続く3.2節では情報集合$\psi_{l,t}$の下での期間$t+s$の第$i$資産の第$k$ファクターの条件付収益率$\tilde{r}_{ik,t+s}\,|\,\psi_{l,t}$を求める。3.3節では，前小節で求めた期間$t+s$の各条件付収益率をファクター$k$について合計した期間$t+s$の1期間中の第$i$資産の条件付収益率$\tilde{r}_{i,t+s}\,|\,\psi_{l,t}$を導出する。

3.1　期間$t+s$の期待収益率の導出

以下の議論では，1期間をm個の時間帯に区分して，n種類の資産が任意の時間帯に取引されるケースを想定する。仮りに，1種類の資産が任意の時間帯にn個の市場で取引されるケースを考えるならば，以下で出現す

る第i資産$(i=1,2,\cdots,n)$を第i市場と読み替えるべきである。

まず(2)式から期間$t+s\ (s\geq 0)$までの各資産の各ファクター収益率を求め，情報集合$\psi_{l,t}$を条件とした期待値を求めると，すべての式の誤差項はゼロとなる。次に期間$t+s$までの条件付期待収益率$E[\widetilde{r}_{ik,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]$から無条件期待収益率$\mathbf{m}_k$を差し引いて，繰り返し代入して，最後に両辺から$\mathbf{m}_k$を差し引くことにより(5)式の$E[\widetilde{r}_{ik,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]$を求めることができる。ここで，$\mathbf{m}_k$は第1資産から第$n$資産までの第$k$ファクターの無条件期待収益率の列ベクトルを表し，無条件期待収益率とは無限に遠い将来に期待される収益率を意味する。留意すべきは$s=0$で同じ期間t内に現時点があろうとも，第kファクターの収益率を未だ観測していない時点に現在があれば，第kファクターの収益率は情報集合$\psi_{l,t}$の下での条件付期待収益率を求めることになる。(導出の詳細は **Appendix A** を参照されたい。)

$$
\begin{bmatrix} E[\widetilde{r}_{1k,t+s}\,|\,\psi_{l,t}] \\ \vdots \\ E[\widetilde{r}_{nk,t+s}\,|\,\psi_{l,t}] \end{bmatrix}
=\begin{cases}
\left[\mathbf{I}_n-\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s}\right]\mathbf{m}_k \\
\quad +\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s-1}\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\left[\prod_{j=1}^{m-l}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{r}_{l,t}-\sum_{w=m-l}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{A}_{k-j+1}\mathbf{c}_{m-w}\right] \\
\qquad\qquad\qquad \text{if} \quad 1\leq k\leq l\leq m, \\
\left[\mathbf{I}_n-\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s}\right]\mathbf{m}_k \\
\quad +\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s}\left[\prod_{i=1}^{k-l}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{r}_{l,t}+\sum_{w=0}^{k-l-1}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{c}_{k-w}\right] \\
\qquad\qquad\qquad \text{if} \quad 1\leq l<k\leq m.
\end{cases}
\tag{5}
$$

ここで，

$$\mathbf{r}_{k,t} \equiv [r_{1k,t} \quad \cdots \quad r_{nk,t}]^{\mathbf{T}}, \qquad \mathbf{c}_k \equiv [c_{1k} \quad \cdots \quad c_{nk}]^{\mathbf{T}}, \qquad \mathbf{A}_k \equiv [a_{ijk}], \qquad \mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A}_m,$$

$$\prod_{i=1}^{0}\mathbf{A}_{k-i+1} = \prod_{j=1}^{0}\mathbf{A}_{m-j+1} = \left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{0} \equiv \mathbf{I}_n,$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{-1} \equiv \mathbf{0}, \tag{6}$$

$$\mathbf{m}_k \equiv \left(\mathbf{I}_n - \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{-1}\left[\sum_{w=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{c}_{k-w} + \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{c}_{m-w}\right],$$

$$\text{for} \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

であり，上付き添え字 $\mathbf{T}$ は転置行列であり，上付き添え字 -1 は逆行列を表し，$\mathbf{I}_n$ は $n \times n$ 単位行列である。(5)式について留意すべき点は，現時点で $E[\tilde{r}_{ik,t} \mid \psi_{l,t}]$ が既知であるか未知であるかに依存することであり，第1式は既知であるケースであり（$E[\tilde{r}_{ik,t} \mid \psi_{l,t}] = r_{ik,t}$），第2式は未知であるケースである。言い換えれば，現時点の第 k ファクターの収益率に関して，第1式はすでに観測しているケースであり，第2式は未だ観測していないケースである。このことは以下の内容にも通用する。さらに $k = l$ のときに限り，(5)式は無条件期待収益率の列ベクトル $\mathbf{m}_l$ と現時点の収益率の列ベクトル $\mathbf{r}_{l,t}$ の線型結合の形で導ける[7)]。

3.2　期間 $t+s$ の第 k ファクターの収益率の導出

次に，情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での（$l = 1, 2, \cdots, m$），期間 $t+s$ ($s \geq 0$) の第 i 資産の第 k ファクターの条件付収益率 $\tilde{r}_{ik,t+s} \mid \psi_{l,t}$ を求める。そこで，まず(5)式の条件付期待収益率から条件付収益率を差し引いて，誤差項だけからなる式を求め，最終的にすべての誤差項の係数を再帰的に代入することにより求めると，(7)式となる。（導出の詳細は **Appendix B** を参照されたい。）

$$
\begin{bmatrix} \widetilde{r}_{1k,\,t+s} \mid \psi_{l,\,t} \\ \vdots \\ \widetilde{r}_{nk,\,t+s} \mid \psi_{l,\,t} \end{bmatrix}
= \begin{cases}
\begin{aligned}
&\left[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s} \right] \mathbf{m}_k \\
&\quad + \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-1} \prod_{i=1}^{k} {}_{k-i+1} \left[\prod_{j=1}^{m-l} \mathbf{A}_{m-j+1} \mathbf{r}_{l,\,t} - \sum_{w=m-l}^{m-k-1} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{A}_{m-j+1} \mathbf{c}_{m-w} \right] \\
&\quad + \sum_{v=q}^{p} \left[\left[\sum_{u=1}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v} \prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \sum_{u=k}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v-1} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1} \right] \widetilde{\mathbf{e}}_{u,\,t+v} \mid \psi_{l,\,t} \right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if} \quad 1 \le k \le l \le m,
\end{aligned} \\[2ex]
\begin{aligned}
&\left[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s} \right] \mathbf{m}_k \\
&\quad + \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s} \left[\prod_{i=1}^{k-l} \mathbf{A}_{k-i+1} \mathbf{r}_{l,\,t} + \sum_{w=0}^{k-l-1} \prod_{i=1}^{w} \mathbf{A}_{k-i+1} \mathbf{c}_{k-w} \right] \\
&\quad + \sum_{v=q}^{p} \left[\left[\sum_{u=1}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v} \prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \sum_{u=k}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v-1} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1} \right] \widetilde{\mathbf{e}}_{u,\,t+v} \mid \psi_{l,\,t} \right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if} \quad 1 \le l < k \le m.
\end{aligned}
\end{cases} \tag{7}
$$

ここで,

$$
\widetilde{\mathbf{e}}_{u,\,t+v} \mid \psi_{l,\,t} \equiv [\widetilde{\varepsilon}_{1u,\,t+v} \mid \psi_{l,\,t} \quad \cdots \quad \widetilde{\varepsilon}_{nu,\,t+v} \mid \psi_{l,\,t}]^{\mathrm{T}},
$$

$$
p = \begin{cases} s & \text{if} \quad 1 \le u \le k \le m \\ s-1 & \text{if} \quad 1 \le k < u \le m \end{cases}, \quad q = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 1 \le u \le l \le m \\ 0 & \text{if} \quad 1 \le l < u \le m \end{cases}, \tag{8}
$$

である。ここでも u と l との関係は前小節の k と l との関係と同様に，現時点で $\tilde{\varepsilon}_{iu,t} \mid \psi_{l,t}$ が既知であるか未知であるかに依存する。

3.3　期間 $t+s$ の収益率の導出

次に，期間 $t+s\ (s \geq 0)$ の1期間中の各資産の収益率を求める。前小節で導いた情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での期間 $t+s$ の第 i 資産の第 k ファクターの条件付収益率 $\tilde{r}_{ik,t+s} \mid \psi_{l,t}$ を $k\ (k=1,2,\cdots,m)$ について加えた収益率が，(9)式の期間 $t+s$ の1期間中の第 i 資産の条件付収益率 $\tilde{r}_{i,t+s} \mid \psi_{l,t}$ である。期間 $t+s\ (s \geq 0)$ の1期間中の各資産の期待収益率は(9)式の両辺の期待値をとることにより得られる。その結果，(9)式の右辺第4項の期待収益率の誤差項の列ベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_{u,t+v} \mid \psi_{l,t}$ がゼロ列ベクトルとなる。

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \tilde{r}_{1,t+s} \mid \psi_{l,t} \\ \vdots \\ \tilde{r}_{n,t+s} \mid \psi_{l,t} \end{bmatrix} \\
&\quad \equiv \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} \tilde{r}_{1k,t+s} \mid \psi_{l,t} \\ \vdots \\ \tilde{r}_{nk,t+s} \mid \psi_{l,t} \end{bmatrix} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{m} \left[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s} \right] \mathbf{m}_k \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{l} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-1} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \left[\prod_{j=1}^{m-l} \mathbf{A}_{m-j+1} \mathbf{r}_{l,t} - \sum_{w=m-l}^{m-k-1} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{A}_{m-j+1} \mathbf{c}_{m-w} \right] \\
&\qquad + \sum_{k=l+1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s} \left[\prod_{i=1}^{k-l} \mathbf{A}_{k-i+1} \mathbf{r}_{l,t} + \sum_{w=0}^{k-l-1} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{A}_{k-j+1} \mathbf{c}_{k-w} \right] \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{v=q}^{p} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v-1} \left[\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right) \sum_{u=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1} \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \sum_{u=k}^{m} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1} \right] \tilde{\mathbf{e}}_{u,t+v} \mid \psi_{l,t} \right]. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

収益率に関する最後のものは，現時点から将来の任意の期間までの多期間の収益率を導くことである。これには(9)式の期間 $t+s$ の1期間中の第 i 資産の条件付収益率 $\widetilde{r}_{i,t+s} \mid \psi_{l,t}$ を s について加えることにより，T 期間の収益率を導くことができる。

4. T 期間収益率の条件付分散

次の小節では，情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での $(l=1,2,\cdots,m)$，期間 $t+s\ (s \geq 0)$ の第 i 資産の第 k ファクターの VAR モデルの誤差項の条件付分散を求め，続く4.2節では情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での期間 $t+s$ の第 i 資産の第 k ファクターの収益率の条件付分散を求める。

4.1 期間 $t+v$ の GARCH モデルの誤差項の条件付分散の導出

期間 $t+v$ までの VAR モデルの誤差項の条件付分散 $\mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{1u,t+v} \mid \psi_{l,t})$ から誤差項の無条件分散 $\mathbf{s}_u^2$ を差し引いて，繰り返し代入して，最後に両辺から $\mathbf{s}_u^2$ を差し引くことにより(10)式の $\mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{1u,t+v} \mid \psi_{l,t})$ を求めることができる。ここで，$\mathbf{s}_u^2$ は第1資産から第 n 資産までの第 u ファクターの VAR モデルの誤差項の無条件分散の列ベクトルを表し，無条件分散とは無限に遠い将来に予測される分散を意味する。留意すべきは $v=0$ で同じ期間 t 内に現時点があろうとも，第 u ファクターの収益率を未だ観測していない時点に現在があれば，第 u ファクターの誤差項の分散は情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での条件付分散を求めることになる。(導出の詳細は **Appendix C** を参照されたい。)

(5)式と同様に(10)式について留意すべき点は，現時点で $\mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{1u,t+v} \mid \psi_{l,t})$ が既知であるか未知であるかに依存することであり，第1式は既知であるケースであり $(\mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{1u,t+v} \mid \psi_{l,t})=0)$，第2式は未知であるケースである。言い換えれば，第1式はすでに第 u ファクターの収益率を観測しているケースであり，第2式は未だ観測していないケースである。さらに $u=l$

のときに限り，(10)式は誤差項の無条件分散の列ベクトル$\mathbf{s}_l^2$と誤差項の条件付分散$\mathbf{h}_{l+1,t}$の線型結合の形で導ける[8)]。

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{1u,t+v}\mid\psi_{l,t}) \\ \vdots \\ \mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{nu,t+v}\mid\psi_{l,t}) \end{bmatrix} = \begin{cases} \left[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{v}\right]\mathbf{s}_u^2 \\ \quad + \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{v-1}\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\left[\prod_{j=1}^{m-l-1}\mathbf{B}_{m-j+1}\mathbf{h}_{l+1,t} - \sum_{w=m-l-1}^{m-u-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{B}_{m-j+1}\mathbf{a}_{m-w}\right] \\ \qquad\qquad \text{if} \quad 1 \le u \le l \le m, \\ \left[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{v}\right]\mathbf{s}_u^2 \\ \quad + \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{v}\left[\prod_{i=1}^{u-l-1}\mathbf{B}_{u-i+1}\mathbf{h}_{l+1,t} + \sum_{w=0}^{u-l-2}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{B}_{u-i+1}\mathbf{a}_{u-w}\right] \\ \qquad\qquad \text{if} \quad 1 \le l < u \le m. \end{cases} \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{h}_{m+1,t} \equiv \mathbf{h}_{1,t+1}$であり，

$$\mathbf{h}_{k,t} \equiv [h_{1k,t} \quad \cdots \quad h_{nk,t}]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{a}_k \equiv [\alpha_{1,k} \quad \cdots \quad \alpha_{n,k}]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{B}_k \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11k}+\gamma_{11k} & \cdots & \beta_{1nk}+\gamma_{1nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1k}+\gamma_{n1k} & \cdots & \beta_{nnk}+\gamma_{nnk} \end{bmatrix},$$

$$\prod_{i=1}^{0}\mathbf{B}_{u-i+1} = \prod_{j=1}^{0}\mathbf{B}_{m-j+1} = \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{0} \equiv \mathbf{I}_n, \tag{11}$$

$$\mathbf{s}_k^2 \equiv \left(\mathbf{I}_n - \prod_{i=1}^{k}\mathbf{B}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{-1}\left[\sum_{w=0}^{k}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{B}_{k-i+1}\mathbf{a}_{k-w} + \prod_{i=1}^{k}\mathbf{B}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{B}_{m-j+1}\mathbf{a}_{m-w}\right],$$

$$\text{for} \quad k = 1, 2, \cdots, m,$$

である。

4.2 期間 $t+s$ の第 k ファクターの収益率の条件付分散の導出

期間 $t+s$ の第 k ファクターの収益率の条件付分散(12)式は(7)式の両辺の条件付分散をとり，(10)式を代入すると得られる。この条件付分散により，現在の情報の下での将来の任意の時点の収益率のリスクが測定可能となる。これまでのリスク測定とは異なり，モデルのパラメータが大きな役割をはたすことになる。

期間 $t+s$ の第 i 資産の収益率の条件付分散は(12)式を $k\,(k=1,2,\cdots,m)$ について加えたものである。さらに T 期間収益率の条件付分散は期間 $t+s$ の第 i 資産の収益率の条件付分散を $s\,(s=1,2,\cdots,T)$ について加えたものである。

5. おわりに

本論文では，1期間を m 個の時間帯に区分して，任意の時間帯に取引される n 種類の資産の価格，または1期間中に m 個の市場で取引される1種類の資産の価格が，相互に影響する場合の収益率とそのボラティリティを考慮して多変量 VAR (1)-GARCH (1, 1) モデルを設定した。

そのとき将来にわたる多期間の各収益率は第3節で求め，現在の情報に基づく多期間収益率の分散は第4節で導いた。残された問題は実際に実証分析を行うとともに，多変量 VAR (1)-GARCH (1, 1) モデルの定常性の条件を厳密にすることである。これらはのちの機会に譲りたい。

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{Var}\left(\tilde{r}_{1k,t+s} \,\middle|\, \psi_{l,t}\right) \\ \vdots \\ \mathrm{Var}\left(\tilde{r}_{nk,t+s} \,\middle|\, \psi_{l,t}\right) \end{bmatrix}
=
\begin{cases}
\displaystyle \sum_{v=q}^{p} \Bigg[\sum_{u=1}^{k-1} \Bigg[\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v} \prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1} \Bigg]^{2} \Bigg[\Bigg[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg] \mathbf{s}_u^2 \\
\displaystyle \quad + \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v-1} \prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \Bigg[\prod_{j=1}^{m-l-1} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{h}_{l+1,t} + \sum_{w=m-l-1}^{m-u-1} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{a}_{m-w} \Bigg] \Bigg] \\
\displaystyle \quad + \sum_{u=k}^{l} \Bigg[\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v-1} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1} \Bigg]^{2} \Bigg[\Bigg[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg] \mathbf{s}_u^2 \\
\displaystyle \quad + \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v-1} \prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \Bigg[\prod_{j=1}^{m-l-1} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{h}_{l+1,t} + \sum_{w=m-l-1}^{m-u-1} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{a}_{m-w} \Bigg] \Bigg] \\
\displaystyle \quad + \sum_{u=l+1}^{m} \Bigg[\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v-1} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1} \Bigg]^{2} \Bigg[\Bigg[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg] \mathbf{s}_u^2 \\
\displaystyle \quad + \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg[\prod_{i=1}^{u-l-1} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{h}_{l+1,t} + \sum_{w=0}^{u-l-2} \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{a}_{u-w} \Bigg] \Bigg] \Bigg] \qquad \text{if} \quad 1 \le k \le l \le m, \\[2ex]
\displaystyle \sum_{v=q}^{p} \Bigg[\sum_{u=1}^{l} \Bigg[\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v} \prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1} \Bigg]^{2} \Bigg[\Bigg[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg] \mathbf{s}_u^2 \\
\displaystyle \quad + \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v-1} \prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \Bigg[\prod_{j=1}^{m-l-1} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{h}_{l+1,t} - \sum_{w=m-l-1}^{m-u-1} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{a}_{m-w} \Bigg] \Bigg] \\
\displaystyle \quad + \sum_{u=l+1}^{k-1} \Bigg[\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v} \prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1} \Bigg]^{2} \Bigg[\Bigg[\mathbf{I}_n - \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg] \mathbf{s}_u^2 \\
\displaystyle \quad + \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg[\prod_{i=1}^{u-l-1} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{h}_{l+1,t} + \sum_{w=0}^{u-l-2} \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{a}_{u-w} \Bigg] \Bigg] \\
\displaystyle \quad + \sum_{u=k}^{m} \Bigg[\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v-1} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1} \Bigg]^{2} \Bigg[\mathbf{s}_u^2 \\
\displaystyle \quad + \left(\prod_{i=1}^{u} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \right)^{v} \Bigg[\prod_{i=1}^{u-l-1} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{h}_{l+1,t} + \sum_{w=0}^{u-l-2} \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{a}_{u-w} \Bigg] \Bigg] \Bigg] \qquad \text{if} \quad 1 \le l < k \le m.
\end{cases}
\tag{12}
$$

Appendices

Appendix A

情報集合$\psi_{l,t}$の下での$(l=1,2,\cdots,m)$，期間$t+s\ (s\geq 0)$の第i資産の第kファクターの期待収益率を求める前に，無条件期待収益率を定義しておく。無条件期待収益率とは無限に遠い将来に期待される収益率を意味し，(6)式と(a1)式と(a2)式で定義される。

$$\mathbf{m}_1 \equiv \operatorname*{plim}_{s\to\infty} E[\mathbf{r}_{1,t+s} \mid \Psi_t] = \mathbf{c}_1 + \mathbf{A}_1\left[\operatorname*{plim}_{s\to\infty} E[\widetilde{\mathbf{r}}_{m,t+s-1} \mid \Psi_t]\right] = \mathbf{c}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{m}_m,$$

$$\mathbf{m}_k \equiv \operatorname*{plim}_{s\to\infty} E[\widetilde{\mathbf{r}}_{k,t+s} \mid \Psi_t] = \mathbf{c}_k + \mathbf{A}_k\left[\operatorname*{plim}_{s\to\infty} E[\widetilde{\mathbf{r}}_{k-1,t+s} \mid \Psi_t]\right] = \mathbf{c}_k + \mathbf{A}_k\mathbf{m}_{k-1}$$
$$\text{for} \quad k=2,3,\cdots,m. \qquad \text{(a1)}$$

ここで，ψ_{plim}は確率極限（limit in probability）を表し，情報集合Ψ_tは$\{\psi_{1,t}$，$\psi_{2,t}$，…，$\psi_{m,t}\}$の任意の要素とし，

$$E[\widetilde{\mathbf{r}}_{k,t+s} \mid \Psi_t] \equiv [E[\widetilde{r}_{1k,t+s} \mid \psi_{l,t}] \ \cdots \ E[\widetilde{r}_{nk,t+s} \mid \psi_{l,t}]]^{\mathrm{T}} \quad \text{for} \quad k,l=1,2,\cdots,m, \quad \text{(a2)}$$

である。(a1)式を順次繰り返し代入して整理すると，(a3)式が得られる。

$$\left(\mathbf{I}_n - \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)\mathbf{m}_k = \sum_{w=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{c}_{k-w} + \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{c}_{m-w}$$
$$\text{for} \quad k=1,2,\cdots,m. \qquad \text{(a3)}$$

(a3)式から第kファクターの無条件期待収益率の列ベクトル$\mathbf{m}_k$を求めると，(a4)式となる。

$$\mathbf{m}_k = \left(\mathbf{I}_n - \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{-1}\left[\sum_{w=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{c}_{k-w} + \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{c}_{m-w}\right]$$
$$\text{for} \quad k=1,2,\cdots,m. \qquad \text{(a4)}$$

次に，情報集合$\psi_{l,t}$の下での期間$t+s$の条件付期待収益率$E[\tilde{r}_{ik,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]$ $(k,l=1,2,\cdots,m\quad k>l)$ から無条件期待収益率を差し引いて行列表示したものを$\mathbf{W}_{k,s}$で表し，繰り返し代入していくことにより，(a5)式が得られる。(a5)式中の$E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t}\,|\,\psi_{l,t}]$は条件$k>l$より，条件$\psi_{l,t}$と収益率$\tilde{\mathbf{r}}_{k,t}$が同じ期間内$t$であっても未知数であり，最終的に(2)式を使って導くことになる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}_{k,s} &\equiv E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k \\
&= \mathbf{c}_k+\mathbf{A}_k E[\tilde{\mathbf{r}}_{k-1,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k=\mathbf{c}_k+\mathbf{A}_k\mathbf{c}_{k-1}+\mathbf{A}_k\mathbf{A}_{k-1}E[\tilde{\mathbf{r}}_{k-2,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k \\
&= \sum_{w=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{c}_{k-w}+\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{c}_{m-w} \\
&\quad +\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t+s-1}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k \\
&= \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}(E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t+s-1}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k) \\
&= \prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{W}_{k,s-1}=\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s}\mathbf{W}_{k,0} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s}(E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s}\left[\prod_{i=1}^{k-l}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{r}_{l,t}+\sum_{w=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{c}_{k-w}-\mathbf{m}_k\right]\ \text{if}\ 1\le l<k\le m.
\end{aligned}
\tag{a5}
$$

同様に，情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での期間 $t+s$ の条件付期待収益率 $E[\tilde{r}_{ik,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]$ $(k,l=1,2,\cdots,m\quad k\le l)$ から無条件期待収益率を差し引いて，列ベクトル $\hat{\mathbf{W}}_{k,s}$ で表すと(a6)式となる。ここで，条件 $k\le l$ より $E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t}\,|\,\psi_{l,t}]=\mathbf{r}_{k,t}$ であるから，(a5)式を参考にして$s=1$まで求めてから，(2)式を使って(a6)式を導く。

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{W}}_{k,s} &\equiv E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k=\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s-1}\hat{\mathbf{W}}_{k,1}\\
&=\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s-1}(E[\tilde{\mathbf{r}}_{k,t+1}\,|\,\psi_{l,t}]-\mathbf{m}_k)\\
&=\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s-1}\left[\sum_{w=0}^{k-1}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{A}_{k-i+1}\mathbf{c}_{k-w}+\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-l-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{c}_{m-w}\right.\\
&\qquad\left.+\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-l}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{r}_{l,t}-\mathbf{m}_k\right]\\
&=\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s-1}\prod_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{k-i+1}\left[\prod_{j=1}^{m-l}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{r}_{l,t}-\sum_{w=m-l}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{c}_{m-w}\right.\\
&\qquad\left.-\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{A}_{m-j+1}\mathbf{m}_k\right] \qquad \text{if}\quad 1\le k\le l\le m. \qquad \text{(a6)}
\end{aligned}
$$

(a5)式と(a6)式のそれぞれの両辺から無条件期待収益率の列ベクトル $\mathbf{m}_k$ を差し引いて，まとめたものが(5)式である。 *Q.E.D.*

Appendix B

情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での $(l=1,2,\cdots,m)$，期間 $t+s\ (s\ge 0)$ の第 i 資産の第 k ファクターの収益率モデルの全誤差項の係数を求めるために，まず条件付収益率から条件付期待収益率を差し引いた(b1)式を定義する。

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\tilde{r}_{1k,t+s}\,|\,\psi_{l,t}-E[\tilde{r}_{1k,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]\\ \vdots\\ \tilde{r}_{nk,t+s}\,|\,\psi_{l,t}-E[\tilde{r}_{nk,t+s}\,|\,\psi_{l,t}]\end{bmatrix}\\
&\equiv\sum_{u=1}^{m}\left[\sum_{v=1}^{s}\begin{bmatrix}B_{11vs}^{(uk)}&\cdots&B_{1nvs}^{(uk)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B_{n1vs}^{(uk)}&\cdots&B_{nnvs}^{(uk)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\varepsilon}_{1u,t+v}\,|\,\psi_{l,t}\\ \vdots\\ \tilde{\varepsilon}_{nu,t+v}\,|\,\psi_{l,t}\end{bmatrix}\right]\\
&=\sum_{u=l+1}^{m}\begin{bmatrix}B_{110s}^{(uk)}&\cdots&B_{1n0s}^{(uk)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B_{n10s}^{(uk)}&\cdots&B_{nn0s}^{(uk)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\varepsilon}_{1u,t}\,|\,\psi_{l,t}\\ \vdots\\ \tilde{\varepsilon}_{nu,t}\,|\,\psi_{l,t}\end{bmatrix}+\sum_{u=1}^{m}\left[\sum_{v=1}^{s-1}\begin{bmatrix}B_{11vs}^{(uk)}&\cdots&B_{1nvs}^{(uk)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B_{n1vs}^{(uk)}&\cdots&B_{nnvs}^{(uk)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\varepsilon}_{1u,t+v}\,|\,\psi_{l,t}\\ \vdots\\ \tilde{\varepsilon}_{nu,t+v}\,|\,\psi_{l,t}\end{bmatrix}\right]\\
&\quad+\sum_{u=1}^{k}\begin{bmatrix}B_{11ss}^{(uk)}&\cdots&B_{1nss}^{(uk)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B_{n1ss}^{(uk)}&\cdots&B_{nnss}^{(uk)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\varepsilon}_{1u,t+s}\,|\,\psi_{l,t}\\ \vdots\\ \tilde{\varepsilon}_{nu,t+s}\,|\,\psi_{l,t}\end{bmatrix} \qquad \text{for}\quad k=1,2,\cdots,m. \qquad \text{(b1)}
\end{aligned}
$$

GARCH モデルである(3)式を使って，繰り返し代入した結果は(b2)式である。

$$\begin{bmatrix} B_{11vs}^{(uk)} & \cdots & B_{1nvs}^{(uk)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1vs}^{(uk)} & \cdots & B_{nnvs}^{(uk)} \end{bmatrix}
= \begin{cases} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s-v-1} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1}\right) & \text{if} \quad 1 \le k \le u \le m, \\ \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1}\right)^{s-v} \left(\prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1}\right) & \text{if} \quad 1 \le u < k \le m, \end{cases}$$

$$\text{for} \quad v = 1, 2, \cdots, s. \qquad \text{(b2)}$$

(b1)式に(b2)式を代入すると，(b3)式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \widetilde{r}_{1k,\,t+s} \mid \psi_{l,\,t} - E[\widetilde{r}_{1k,\,t+s} \mid \psi_{l,\,t}] \\ \vdots \\ \widetilde{r}_{nk,\,t+s} \mid \psi_{l,\,t} - E[\widetilde{r}_{nk,\,t+s} \mid \psi_{l,\,t}] \end{bmatrix}
= \sum_{v=q}^{p} \left[\left[\sum_{u=1}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v} \prod_{i=1}^{k-u} \mathbf{A}_{k-i+1} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{u=k}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{A}_{m-j+1} \right)^{s-v-1} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{k-i+1} \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{A}_{m-j+1} \right] \widetilde{\mathbf{e}}_{u,\,t+v} \mid \psi_{l,\,t} \right]. \qquad \text{(b3)}$$

最後に，(b3)式の両辺から条件付期待収益率を引いて，(5)式を代入すると(7)式が得られる。　*Q.E.D.*

Appendix C

まず情報集合$\psi_{l,t}$の下での$(l=1,2,\cdots,m)$，期間$t+s\ (s\geq 0)$の第i資産の第kファクターのVARモデルの誤差項の無条件分散を(11)式と(c1)式と(c2)式で定義しておく。ここで，誤差項の無条件分散とは無限に遠い将来に予測される誤差項の分散を意味する。

$$\mathbf{s}_1^2 \equiv \operatorname*{plim}_{s\to\infty}[\mathrm{Var}(\widetilde{\mathbf{e}}_{1,t+s}\mid\Psi_t)] = \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_1 \operatorname*{plim}_{s\to\infty}[\mathrm{Var}(\widetilde{\mathbf{e}}_{m,t+s-1}\mid\Psi_t)] = \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{s}_m^2,$$

$$\mathbf{s}_k^2 \equiv \operatorname*{plim}_{s\to\infty}[\mathrm{Var}(\widetilde{\mathbf{e}}_{k,t+s}\mid\Psi_t)] = \mathbf{a}_k + \mathbf{B}_k \operatorname*{plim}_{s\to\infty}[\mathrm{Var}(\widetilde{\mathbf{e}}_{k-1,t+s}\mid\Psi_t)] = \mathbf{a}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{s}_{k-1}^2$$

$$\text{for}\quad k=2,3,\cdots,m. \qquad \text{(c1)}$$

ここで，

$$\mathrm{Var}(\widetilde{\mathbf{e}}_{k,t+s}\mid\Psi_t) \equiv [\mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{1k,t+s}\mid\psi_{l,t}) \quad \cdots \quad \mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{nk,t+s}\mid\psi_{l,t})]^{\mathrm{T}} \quad \text{for}\quad k,l=1,2,\cdots,m, \qquad \text{(c2)}$$

である。次に(c1)式を順次繰り返し代入すると，(c3)式を得る。

$$\left(\mathbf{I}_n - \prod_{i=1}^{k}\mathbf{B}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)\mathbf{s}_k^2 = \sum_{w=0}^{k}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{B}_{k-i+1}\mathbf{a}_{k-w} + \prod_{i=1}^{k}\mathbf{B}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{B}_{m-j+1}\mathbf{a}_{m-w}$$

$$\text{for}\quad k=1,2,\cdots,m. \qquad \text{(c3)}$$

(c3)式からVARモデルの誤差項の無条件分散の列ベクトル$\mathbf{s}_k^2$を求めると，(c4)式となる。

$$\mathbf{s}_k^2 = \left(\mathbf{I}_n - \prod_{i=1}^{k}\mathbf{B}_{k-i+1}\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{-1}\left[\sum_{w=0}^{k}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{B}_{k-i+1}\mathbf{a}_{k-w} + \prod_{i=1}^{k}\mathbf{B}_{k-i+1}\sum_{w=0}^{m-k-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{B}_{m-j+1}\mathbf{a}_{m-w}\right]$$

$$\text{for}\quad k=1,2,\cdots,m. \qquad \text{(c4)}$$

次に，情報集合$\psi_{l,t}$の下での期間$t+s$のVARモデルの誤差項の条件付分散$\mathrm{Var}(\widetilde{\varepsilon}_{iu,t+v}\mid\psi_{l,t})$ $(u,l=1,2,\cdots,m\quad u>l)$から無条件分散を差し引いた

ものを列ベクトル $\mathbf{G}_{u,v}$ で表し，式に繰り返し代入していくことにより，(c5)式を得る。(c5)式中の $\mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{k,t}\,|\,\psi_{l,t})$ は条件 $u>l$ より，条件 $\psi_{l,t}$ と誤差項 $\tilde{\mathbf{e}}_{k,t}$ が同じ期間 t であっても未知数であり，最終的に(3)式を使って導くことになる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{u,v} &\equiv \mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{u,t+v}\,|\,\psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2 \\
&= \mathbf{a}_u + \mathbf{B}_u(\mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{u-1,t+v}\,|\,\psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2) \\
&= \mathbf{a}_u + \mathbf{B}_u\mathbf{a}_{u-1} + \mathbf{B}_u\mathbf{B}_{u-1}\ \mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{u-2,t+v}\,|\,\psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2 \\
&= \mathbf{a}_u + \sum_{w=0}^{u}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{B}_{u-i+1}\mathbf{a}_{u-w} + \prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\sum_{w=0}^{m-u-1}\prod_{j=1}^{w}\mathbf{B}_{m-j+1}\mathbf{a}_{m-w} \\
&\quad + \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)\mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{u,t+v-1}\,|\,\psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2 \\
&= \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)(\mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{u,t+v-1}\,|\,\psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2) = \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)\mathbf{G}_{u,v-1} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{v}\mathbf{G}_{u,0} = \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{v}(\mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{u,t}\,|\,\psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{u}\mathbf{B}_{u-i+1}\prod_{j=1}^{m-u}\mathbf{B}_{m-j+1}\right)^{v}\left[\prod_{i=1}^{u-l-1}\mathbf{B}_{u-i+1}\mathbf{h}_{l+1,t} + \sum_{w=0}^{u-l-2}\prod_{i=1}^{w}\mathbf{B}_{u-i+1}\mathbf{a}_{u-w} - \mathbf{s}_u^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\text{if}\quad 1 \le l < u \le m. \qquad \text{(c5)}
$$

同様に，情報集合 $\psi_{l,t}$ の下での期間 $t+s$ の VAR モデルの誤差項の条件付分散 $\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}_{iu,t+v}\,|\,\psi_{l,t})$ $(u, l = 1, 2, \cdots, m \quad u>l)$ から無条件分散を差し引いたものを列ベクトル $\hat{\mathbf{G}}_{u,v}$ で表すと(c6)式となる。ここで，条件 $u \le l$ より $\mathrm{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_{k,t}\,|\,\psi_{l,t}) = \mathbf{0}$，言い換えれば誤差項は確定値であるから，(c5)式を参考にして $s=1$ まで求めてから，(3)式を使って(c6)式を導く。ここで，$\mathbf{0}$ はすべての要素がゼロの $n \times n$ 行列を表す。

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{G}}_{u,v} &\equiv \mathrm{Var}\,(\widetilde{\mathbf{e}}_{u,t+v} \,|\, \psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2 \\
&= \left(\prod_{i=0}^{u-1} \mathbf{B}_{u-i} \prod_{j=0}^{m-u-1} \mathbf{B}_{m-j} \right)^{v-1} (\mathrm{Var}\,(\widetilde{\mathbf{e}}_{u,t+1} \,|\, \psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{u-1} \mathbf{B}_{u-i} \prod_{j=0}^{m-u-1} \mathbf{B}_{m-j} \right)^{v-1} \Bigg[\sum_{w=0}^{u} \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{a}_{u-w} + \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \sum_{w=0}^{u} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{a}_{m-w} \\
&\quad + \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-l-1} \mathbf{B}_{m-j+1}\, \mathrm{Var}\,(\widetilde{\mathbf{e}}_{l+1,t} \,|\, \psi_{l,t}) - \mathbf{s}_u^2 \Bigg] \\
&= \left(\prod_{i=0}^{u-1} \mathbf{B}_{u-i} \prod_{j=0}^{m-u-1} \mathbf{B}_{m-j} \right)^{v-1} \Bigg[\sum_{w=0}^{u} \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \mathbf{a}_{u-w} + \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \sum_{w=0}^{u} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{a}_{m-w} \\
&\quad + \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \prod_{j=1}^{m-l-1} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{h}_{l+1,t} - \mathbf{s}_u^2 \Bigg] \\
&= \left(\prod_{i=0}^{u-1} \mathbf{B}_{u-i} \prod_{j=0}^{m-u-1} \mathbf{B}_{m-j} \right)^{v-1} \prod_{i=1}^{w} \mathbf{B}_{u-i+1} \Bigg[\prod_{j=1}^{m-l-1} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{h}_{l+1,t} - \sum_{w=m-l-1}^{m-u-1} \prod_{j=1}^{w} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{a}_{m-w} \\
&\quad - \prod_{j=1}^{m-u} \mathbf{B}_{m-j+1} \mathbf{s}_u^2 \Bigg] \qquad \text{if} \quad 1 \le u \le l \le m. \qquad \text{(c6)}
\end{aligned}
$$

ここで，現時点（期間tの第1時点）で$\mathbf{h}_{l+1,t}$は直接観測不可能であるが，(3)式のGARCHモデルから期間tの第lファクターの収益率の残差$\widetilde{\mathbf{e}}_{l,t}$と誤差項の条件付分散$\mathbf{h}_{l,t}$はすでに既知であるから，その結果，$\mathbf{h}_{l+1,t}$は計測可能となる。

(c5)式と(c6)式のそれぞれの両辺から無条件期待収益率を差し引いて，まとめたものが(10)式である。 *Q.E.D.*

〔注〕

1） 第1（夜間）収益率をr_{1t}，第2（日中）収益率r_{2t}として，次のGARCHモデルを設定する。

$$
\begin{aligned}
r_{1t} &= c_1 + a_1 r_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{1t} \,|\, \psi_{2t-1} \sim N(0, h_{1t}) \quad E[\varepsilon_{1t}\varepsilon_{1t+s} \,|\, \psi_{2t-1}] = E[\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t+s-1} \,|\, \psi_{2t-1}] = 0, \\
r_{2t} &= c_2 + a_2 r_{1t} + \varepsilon_{2t} \quad \varepsilon_{2t} \,|\, \psi_{1t} \sim N(0, h_{2t}) \quad E[\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1t+s} \,|\, \psi_{1t}] = E[\varepsilon_{2t}\varepsilon_{2t+s} \,|\, \psi_{1t}] = 0, \\
&\qquad (s = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

$$h_{1t} \equiv \mathrm{Var}(\varepsilon_{1t} \mid \psi_{2t-1}) = \alpha_1 + \beta_1 \varepsilon_{2t-1}^2 + \gamma_1 h_{2t-1},$$
$$h_{2t} \equiv \mathrm{Var}(\varepsilon_{2t} \mid \psi_{1t}) = \alpha_2 + \beta_2 \varepsilon_{1t}^2 + \gamma_2 h_{1t},$$

ここで，$\psi_{1t} = \{\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t-1}, \varepsilon_{1t-1}, \cdots\}$，$\psi_{2t} = \{\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t-1}, \varepsilon_{1t-1}, \cdots\}$ である。

2） 彼らは1985年10月3日から1986年9月26日の東京市場とニューヨーク市場とヨーロッパ市場の3市場間の日次¥/$為替レートの変化率をGARCHモデルで分析している。ここで，heat wave 仮説として，為替変動がその国固有の変動として説明できるか，または meteor shower 仮説として，為替変動が各国市場間に影響して行くか，を検証している。

$$\varepsilon_{it} \mid \psi_{it-1} \sim N(0, h_{it}), \qquad h_{it} = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \varepsilon_{jt}^2 + \sum_{j=i}^{4} \alpha_{ij} \varepsilon_{jt-1}^2 + \beta_{ii} h_{it-1}.$$

ここで，$\psi_{it} = \{\varepsilon_{jt}, \varepsilon_{kt-1}, \varepsilon_{kt-2}, \cdots\}$ $(i \geq j,\ \ i, j, k = 1, 2, 3, 4)$ であり，太平洋，東京，欧州，ニューヨークを意味する。

3） 彼らは Engle, Ito, and Lin (1990) の分析を1979年2月1日から1988年12月23日に延長して，次のモデルで再分析している。

$$\varepsilon_{it} \mid \psi_{it-1} \sim N(0, h_{it}), \qquad h_{it} = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} \varepsilon_{jt-1}^2 + \beta_{ii} h_{it-1}.$$

ここで使用された記号は注2）の記号と同じである。

4） 米国ドルに対する主要欧州4通貨（英ポンド，独マルク，スイスフラン，仏フラン）の週次リスク·プレミアム（spot rate と30日 forward rate の差）を次式で分析している。

$$s_{it+4} - f_{it} = c_0 + \sum_{j=1}^{4} a_j \varepsilon_{it+4-j} + \varepsilon_{it+4}, \qquad \varepsilon_{it} \mid \psi_{it-1} \sim N(0, h_{iit}),$$

$$h_{iit} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \varepsilon_{it-1}^2 + \beta_{i1} h_{iit-1}, \qquad h_{ijt} = \rho_{ij} (h_{iit} h_{jjt})^{1/2}.$$

ここで，$\psi_{it} = \{\varepsilon_{jt}, \varepsilon_{kt-1}, \varepsilon_{kt-2}, \cdots\}$ $(i \geq j,\ \ i, j, k = 1, 2, 3, 4)$ であり，s_t は時点 t での第 i 通貨の spot rate，f_t は時点 t での第 i 通貨の30日 forward rate であり，i と j は英ポンド，独マルク，スイスフラン，仏フランを意味する。

5） 米国ドルに対する主要欧州4通貨（英ポンド，独マルク，スイスフラン，仏フラン，伊リラ）の spot rate の変化率を次式で分析している。

$$100 \ln(s_{it} / s_{it-1}) = c_0 + \varepsilon_{it}, \qquad \varepsilon_{it} \mid \psi_{it-1} \sim N(0, h_{iit}),$$

$$h_{iit} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \varepsilon_{it-1}^2 + \beta_{i1} h_{iit-1}, \qquad h_{ijt} = \rho_{ij} (h_{iit} h_{jjt})^{1/2}.$$

ここで，$\psi_{it} = \{\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it-1}, \cdots\}$ であり，s_{it} は時点 t での第 i 通貨の spot rate であり，

i, j = 英ポンド，独マルク，スイスフラン，仏フラン，伊リラを表す。

6）時点 t の第 m ファクターの各収益率を観測し，時点 $t+1$ の第１ファクターの各収益率はまだ観測していない時点に現在がある場合の情報集合は $\psi_{m,t}$ となる。言い換えれば，現在が時点 t の第 m 区分から時点 $t+1$ の第１区分にあるときの情報集合が $\psi_{m,t}$ である。

7）無条件期待収益率と現時点の収益率との線型結合の形で表されることは，Akgiray (1989) と拙稿 (1993, 1996) と同様である。

8）誤差項の無条件分散と誤差項の条件付分散との線型結合の形で表されることは，Akgiray (1989) と拙稿 (1993, 1996) と同様である。

〔参考文献〕

Akgiray, V., 1989, "Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forcasts," *Journal of Business,* 66 (1), pp. 55–80.

Ballie, R. T. and T. Bollerslev, 1990, "A Multivariate Generalized ARCH Approach to Modeling Risk Premia in Forward Foreign Exchange Rate Markets," *Journal of International Money and Finance,* 9, pp. 309–324.

Black, F. and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy,* 81, pp. 637–654.

Bollerslev, T., 1986, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics,* 31, pp. 307–327.

——, 1990, "Modelling the Coherence in Sort-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model," *Review of Economics and Statistics,* 72, pp. 498–505.

Engel, R. F., 1982, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Esitimates of the Variance of U.K. Infration," *Econometrics,* 50, pp. 987–1008.

Engle, R. F., T. Ito, and W. L. Lin, 1990, "Meteor Showers or Heart Waves? Heteroskedastic Intra-Daily Volatility in the Foreign Exchange Market," *Econometrica,* 58, pp. 525–542.

Ito, T, R. F. Engle, and W. L. Lin, 1992, "Where does the Meteor Shower Come from ?: The Role of Stochastic Policy Coordination," *Journal of International Economics,* 32, pp. 221–240.

Merton, R. K., 1976, "Options Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics,* 3, pp. 125–144, 再掲載：*Continuous-Time Finance,* 第9章, Basil Blackwell, Massachusetts, 1990.

中川裕司，1993,「ARCH モデルによる日中・夜間収益率の条件付きボラティリティの推定」『日本経営数学会誌』第 15 号，pp. 11–20.

——，1996,「2変量 VAR (1)-GARCH (1, 1) モデルによる n 期間収益率のボラティリティの計測〔研究ノート〕」『岐阜経済大学論集』第30巻第1号，pp. 37–64.